# MODELAGEM MATEMÁTICA: O USO DE EMBALAGENS COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

*MATHEMATICAL MODELING: THE USE OF PACKAGING AS A DIDACTIC RESOURCE FOR TEACHING AND LEARNING THE CONCEPT OF GEOMETRIC SOLID*

Josemir do Carmo[[1]](#footnote-1)

**RESUMO**

Para entender Matemática, não basta apenas abstração, tem-se que procurar situações do cotidiano, aproximando os conhecimentos adquiridos com criatividade e relacionando-os a um contexto e, assim, criar cenários para uma aprendizagem motivadora, que supere o distanciamento entre as experiências do aluno e os conteúdos estudados. O objetivo deste trabalho é sugerir atividades com o uso de embalagens no trabalho com a Modelagem Matemática (MM) para facilitar o ensino e aprendizagem do conceito de sólidos geométricos. As atividades utilizando embalagens, quando adaptadas, podem ser trabalhadas desde os anos iniciais até o Ensino Superior. A MM na educação matemática recorre à abordagem de questões reais, oriundas do âmbito de interesse dos alunos e como alternativa metodológica estimula a motivação e compreensão dos conteúdos da matemática escolar. Corrobora assim para a construção de conhecimentos, mostra a aplicação da Matemática em outras áreas do conhecimento, gera significado à matemática, além de ser um dos caminhos para desenvolver, abordar e aplicar diversos assuntos matemáticos simultaneamente. Optou-se pela pesquisa bibliográfica por ser uma investigação em material teórico sobre o assunto de interesse e tem por objetivo reunir informações e dados para a construção da investigação proposta. A pesquisa fundamenta-se em teses e dissertações disponíveis no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e em livros de autores pesquisadores sobre o tema, evidenciando que há diversos pesquisadores dedicados ao tema MM. As atividades com o uso de embalagens contextualizam o ensino de matemática permitem aos alunos estudarem as formas geométricas, fazerem medidas, comparações, planificações/modificações, bem como testarem, analisarem, visualizarem, justificarem, registrarem, validarem e explorarem situações reais, criando possibilidades para o conhecimento significativo e reflexivo.

**Palavras-chave**: Geometria. Sólidos Geométricos. Ensino de Matemática. Educação Matemática.

**ABSTRACT**

To understand Mathematics, just abstraction is not enough, we have to look for everyday situations, approaching the knowledge acquired with creativity and relating them to a context and, thus, creating scenarios for motivating learning, which overcomes the distance between the experiences of the student and the content studied. The objective of this work is to suggest activities using packaging when working with Mathematical Modeling (MM) to facilitate teaching and learning the concept of geometric solids. Activities using packaging, when adapted, can be worked on from the initial years until Higher Education. MM in mathematics education uses the approach of real issues, arising from the students' scope of interest and as a methodological alternative it stimulates motivation and understanding of school mathematics content. It thus supports the construction of knowledge, shows the application of Mathematics in other areas of knowledge, generates meaning to mathematics, in addition to being one of the ways to develop, approach and apply several mathematical subjects simultaneously. Bibliographical research was chosen because it is an investigation into theoretical material on the subject of interest and aims to gather information and data for the construction of the proposed investigation. The research is based on theses and dissertations available in the Capes Catalog of Theses and Dissertations and on books by research authors on the topic, showing that there are several researchers dedicated to the topic of MM. Activities using packaging contextualize mathematics teaching, allowing students to study geometric shapes, make measurements, comparisons, planning/modifications, as well as test, analyze, visualize, justify, record, validate and explore real situations, creating possibilities for meaningful and reflective knowledge.

Key-words: Geometry. Geometric solids. Teaching Mathematics. Mathematics Education.

**INTRODUÇÃO**

Segundo Moran com o mundo tecnologicamente avançado e em constantes transformações o acesso à informação tem sido cada vez mais fácil. O impacto das novas tecnologias tem provocado mudanças na educação. Logo as aulas tradicionais não têm mais despertado interesse nos alunos. Diante desta situação é evidente que há necessidade de um trabalho efetivo quanto às perspectivas metodológicas da matemática que auxiliem o professor a tornar seus alunos agentes, sujeitos ativos, críticos e reflexivos no processo de ensino e no ato de aprender.

Nesse viés, sugere-se o trabalho com embalagens a partir da MM uma estratégia de ensino para apresentar ao aluno uma aula inovadora e estimulante, visto que a matemática tem uma perspectiva de educação-movimento. O trabalho feito com a MM parte em geral de problemas do cotidiano dos alunos que possibilitam a eles ir, além de uma aprendizagem multidisciplinar, para uma maior motivação. O educando lida, em seu dia a dia, com desafios e tem a necessidade de solucionar problemas de seu interesse, o que facilita o processo de construção e assimilação de conceitos das mais variadas áreas. Com essa dinâmica, o aprendiz desenvolve ações de pesquisa para aplicá-las em soluções de problemas que surgem ou são propostos. Esse processo é realizado em grupo e possibilita uma orientação mais organizada do trabalho pedagógico em sala de aula. Segundo Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 197-8):

Considerando o uso de objetos da realidade (embalagens), a representação e visualisação desses objetos, a exploração de questões associadas ao seu uso da realidade (vida do consumidor), a investigação sobre as diferentes formas possíveis para embalagens e a utilização de conceitos geométricos para a solução do problema (superfície e volume de sólidos geométricos). Essa abordagem aproxima-se das recomendações dos documentos oficiais, para o estudo da geometria, e permite fazer uma iniciação ao fazer modelagem e as abordagens investigativas.

Neste contexto, acredita-se que o uso embalagens somado à utilização da Modelagem Matemática como metodologia de ensino, pode vir a ser uma aliada do aluno, incentivando-o a participar, resolver e entender os fenômenos e os problemas que ocorrem na sociedade. Conforme apresentado no decorrer do texto, as atividades podem ser adaptadas a qualquer nível de ensino, desde a Educação Infantil ao curso superior.

A ideia central em relação à MM é apoiada no sentido de ajudar alunos a diminuírem o grau de dificuldades apresentado em sala de aula, bem como um agente facilitador de aprendizagem em Matemática. Pode-se auxiliar os alunos na aquisição de conhecimentos voltados para sua cidadania na prática de um cidadão crítico, reflexivo e atuante.

Segundo Bassanezi (2011) a MM pode ser utilizada como estratégia de ensino e aprendizagem, sendo um caminho para tornar a matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável. Nesse ambiente, o aluno poderá ter oportunidade de experimentar, modelar, testar sua capacidade de organização, analisar situações e tomar decisões.

Para Barbosa (2004), o professor, com essa dinâmica, foge da tradicionalidade, isto é, exposição de conteúdo, fazer exercício de fixação e aplicar uma prova com algoritmos diretos, o que já não responde às necessidades dos estudantes na sociedade atual. Uma forma de melhorar o ensino da Matemática é motivar o aluno a aprender de forma prazerosa, criativa, fazer com que o estudante desenvolva a sua capacidade de reflexão afim de torná-lo sujeito ativo e participativo em todas as etapas de sua aprendizagem.

Os alunos necessitam de aprender um instrumental matemático relevante, mas entendemos que essa aprendizagem vai se dar melhor, e isso é apenas uma suposição, se os alunos encontrarem um significado para aquilo que eles estão aprendendo, ou seja, se aquilo que está sendo questionado na sala de aula faz sentido para eles enquanto pessoas que produzem uma prática social. Um aprendizado matemático crítico e comprometido! (Meyer, Caldeira e Malheiros 2013, p. 51).

Dessa forma, a MM pode ser uma estratégia de ensino-aprendizagem, uma vez que com sua utilização é possível desenvolver a compreensão de situações-problemas, bem como a percepção da Matemática em situações cotidianas, dado que a maioria dos estudantes não é capaz de relacionar a importância da Matemática e questionam sua aplicabilidade em situações do dia a dia.

Partindo dessa premissa, o objetivo deste trabalho é sugerir atividades com embalagens para facilitar o ensino e aprendizagem do conceito de sólidos geométricos utilizando a Modelagem Matemática (MM) como alternativa metodológica de ensino. Para um melhor entendimento da temática abordada esse artigo versa, primeiramente, sobre a trajetória da origem da MM como estratégia de ensino no Brasil. O próximo tópico sugere o tema embalagens para trabalhar com MM no ensino de Matemática; logo após, na metodologia, apresentam-se atividades que podem ser desenvolvidas com embalagens usando MM e, por último, traz as considerações finais.

**1 ORIGEM DA MODELAGEM MATEMÁTICA**

Muitos autores argumentam sobre a plausibilidade do uso de Modelagem Matemática no ensino como alternativa ao chamado “método tradicional” como Bassenezi (1990), Blum e Niss (1991); Borba et al. (1997), Biembengut e Hein (1999), Meyer et al. (2013), Almeida et al. (2013). O movimento de MM, tanto em âmbito nacional como internacional, tomou corpo nos últimos trinta anos, contando com a importante contribuição de matemáticos aplicados que migraram para a área da Educação Matemática. De acordo com os PCNs (1998, p. 59):

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática constituem um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. Os parâmetros destacam que a Matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações em que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula.

Segundo Biembengut (1999), o uso da MM no Brasil começou a ser trabalhada nos anos 80 na UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas), por um grupo de professores, da área de Biomatemática, coordenados pelo Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi - IMECC. Em seus primórdios, os estudos buscavam explicações para os modelos de crescimento cancerígenos. A experiência com a modelagem foi realizada pelo professor Rodney, com turma regular de Engenharia de Alimentos, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que possuía programa definido, sendo a experiência muito satisfatória.

Ainda conforme Biembengut (1999), em se tratando de educação brasileira, a MM iniciou-se com os cursos de especialização para professores, no ano de 1983, na (FAFIG), Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Guarapuava, atualmente UNICENTRO, Universidade Estadual do Centro – Oeste, com o início do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática pela UNESP – Campus de Rio Claro. A Modelagem ganhou adeptos, pois a maior preocupação era encontrar formas alternativas para o ensino de Matemática que trabalhassem ou tivessem a preocupação de partir de situações vivenciadas pelo aluno do ensino de 1º e 2º graus, atualmente, Ensino Fundamental e Médio.

Nesse contexto a MM surge como uma metodologia que pode auxiliar no ensino e aprendizagem dos alunos de todo o Ensino Básico. A maneira como essa metodologia é trabalhada permite ao professor estabelecer uma relação da matemática com o cotidiano do aluno. Esse fato torna o estudo mais significativo e motivador, além de trazer elementos que relacionam outras áreas do conhecimento. Permite-se assim que o aluno tenha uma visão ampla do problema em seus vários aspectos, desenvolvendo no mesmo um senso reflexivo-crítico vez que exige dele uma postura atuante na sociedade. Para Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 21):

Modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a final. Neste sentido, relações entre realidade (origem da situação inicial) e matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados) servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ ou produzidos e integrados.

Para iniciar um trabalho baseado na modelagem, é necessário definir o tema da situação-problema que será abordada. Uma vez escolhida, o próximo passo é extrair as informações que o problema traz. Se não há uma ideia central, pode-se iniciar com a contagem, mensuração e a partir daí construir tabelas de dados ou gráficos para se ter uma melhor visualização do problema. A resolução de um problema em geral, quando quantificado, requer a formulação matemática detalhada. Segundo Biembengut e Hein (2013) um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real denomina-se modelo matemático.

Na ciência, a noção de modelo é fundamental, pois em relação à matemática, por exemplo, dada sua arquitetura, é possível a elaboração de modelos matemáticos, dando uma melhor compreensão, simulação e previsão do fenômeno em estudo.

Um modelo pode ser formulado com a utilização de expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, dentre outros. Quando se propõe um modelo, muitas vezes, é formulado a partir de aproximações que nem sempre condizem com a realidade. Ainda assim, um modelo matemático retrata, mesmo que de maneira simplificada, o aspecto da situação pesquisada.

**2 EMBALAGENS: UM TEMA PARA MODELAGEM MATEMÁTICA**

As atividades propostas neste capítulo são baseadas no livro “Modelagem Matemática no Ensino” dos autores Biembengut e Hein (2013), capítulo 2. Percebe-se a enorme diversidade de atividades que podem ser elaboradas em torno de um tema central, bem como a riqueza de informações a serem obtidas a partir do tema embalagens. A interdisciplinaridade surge de modo muito natural conforme vão se levantando as informações necessárias na análise do problema.

O trabalho com temas próprios do cotidiano do aluno pode trazer à tona dúvidas e curiosidades que nem mesmo foram pensadas pelo professor no início da atividade. E a relevância é que todos ganham com isso, pois o professor busca os modos de direcionar o conhecimento, o aluno aprende a argumentar, pesquisar, pensar e tomar decisões, seja individualmente ou em grupo.

Apesar de presentes no dia a dia, os estudantes têm dificuldade em relacionar os conteúdos apresentados em sala de aula com a realidade que os cerca. As formas geométricas estão presentes em um simples dado usado em jogos, nas arquiteturas das construções, em elementos da natureza e nas embalagens.

Estas têm significativa importância para o produto, pois o protege e valoriza sua apresentação. A embalagem precisa despertar a atenção do consumidor com a sua estética e oferecer facilidade ao ser manuseada, dar ao produto proteção da ação do transporte e do tempo, além de apresentar um custo baixo para não elevar o preço final da mercadoria. De acordo com Biembengut e Hein (2013, p. 51):

O tema embalagem, como já foi dito, pode ser utilizado desde as séries iniciais até o ensino superior, adaptando-o à forma de abordagem e à ênfase do conteúdo de acordo com o programa de ensino. Por exemplo, nas séries iniciais o professor pode fazer uso das embalagens mais conhecidas pelos alunos (achocolatado, refrigerante, guloseimas) para iniciar com a alfabetização. Atualmente, com o tipo de propaganda existente, as crianças já conhecem muitas marcas de produtos, ou seja, já sabem ler. Além disso, manuseando-as, poderão aprender sobre formas, tamanhos, cores, interior e exterior, dentre outros. Na educação superior, em particular em Cálculo Diferencial Integral, o aluno pode fazer uso de derivadas para encontrar o ‘tamanho ótimo’ de uma embalagem.

Essa proposta de usar embalagem como tema para trabalhar com Modelagem Matemática na sala de aula é objetivando que os alunos tenham contato direto com as mesmas. Ora quando vão presentear uma pessoa querida, ora atraída pela beleza das diversas formas de embalagens apresentados nos comerciais e propagandas, e outras vezes, pela necessidade de transportar/armazenar um produto.

A presente proposta permite desenvolver os seguintes conteúdos: conceitos primitivos da geometria euclidiana, geometria plana e espacial; nomes e elementos dos sólidos geométricos; sistemas de medidas: linear, superfície, volume - Princípio de Cavalieri, capacidade, massa e peso; arredondamento; funções, construção de gráficos, valor de máximo e mínimo. E, ainda, despertar a conscientização sobre o meio ambiente e a reciclagem do lixo.

**3 METODOLOGIA**

Todo trabalho necessita de uma metodologia que delineia o caminho escolhido pelo investigador para encontrar respostas à sua pergunta e alcançar o seu objetivo. A metodologia se traduz nos métodos, meios e em como o pesquisador conduzirá o seu trabalho pleiteando a dissolução das indagações postas. Este trabalho é fundamentado em pesquisas bibliográficas, das quais foi possível reunir as informações e dados que servirão de base para a construção proposta do trabalho com embalagens na MM. As atividades propostas neste capítulo são baseadas no livro “Modelagem Matemática no Ensino” dos autores Biembengut e Hein (2013) capítulo 2.

Para iniciar o trabalho de MM com o tema embalagem, é pertinente que o professor e alunos tenham uma conversa informal sobre o assunto. É importante comentar sobre os diversos tipos de embalagens à forma, o tamanho e o material disponível como, por exemplo, folhas de papel ou celofane, saco/sacola de pano, plástico ou papel, caixa de papelão e de metal, latas de alumínio, dentre outros.

Em seguida, para realizar este trabalho, o professor deve solicitar aos alunos embalagens ou objetos de diversos tamanhos e formas. O educador deve verificar se as embalagens apresentam as mais diversas formas de sólidos geométricos como caixas de sapatos para representar prismas, lata de leite em pó que representa os cilindros, copo descartável para simular o tronco de cone, embalagens de doces para reproduzir as pirâmides e tronco de pirâmides. É interessante visitar a uma indústria de embalagens para melhor visualização das mesmas.

Forma

Descrição gerada automaticamente

Figura 1: modelos de embalagens (Elaborada pelo pesquisador).

De acordo com Biembengut e Hein (2013, p. 35):

Nesta primeira etapa, você pode resgatar os conceitos geométricos que os alunos já possuem e introduzir outros considerados elementares. Nomes como prisma, cilindro, cone etc. e alguns conceitos de geometria plana e espacial podem ser apresentados aos alunos mesmos que pertençam às séries iniciais. Nesse caso não é preciso definir.

O professor deve resgatar, dessa forma, os conceitos geométricos que os alunos já possuem e introduzir outros considerados elementares de acordo com o currículo em estudo. Conforme o grau de escolaridade e do programa, o professor pode trabalhar as diversas formas que as embalagens possuem, como o cilindro, o cone, o prisma, a pirâmide e a esfera que recebem nomes de sólidos geométricos e que estes se separam em corpos redondos e formas poliédricas. As caixas têm forma de um prisma e as latas de um cilindro. Consoante Almeida, Araújo e Bisognin (2011, p. 196):

Nessa representação das formas geométricas para a embalagem foi possível desenvolver habilidades de construção, com o uso adequado de instrumentos de medição com questionamentos sobre a precisão dos cálculos e das medidas (arredondamentos, estimativas), com noções de proporcionalidade na comparação das formas construídas, com novas hipóteses sobre a otimização investigada.

Ao analisar o cilindro representado pela embalagem da lata de chocolate em pó, assim como o prisma representado pela de leite, percebe-se que ambos possuem bases paralelas. Pode-se notar que os poliedros se classificam quanto às formas poliédricas em dois grupos: os prismas (embalagem de pizza) e as pirâmides (embalagem de trufas). Se observadas as principais características dos prismas fica evidente que têm as faces laterais formadas por paralelogramos e apresentam duas bases, enquanto as pirâmides possuem apenas uma única base e as faces laterais têm formas triangulares.

Quanto às embalagens pode-se observar que os conceitos primitivos da geometria euclidiana estão presentes nos elementos dos poliedros. Na embalagem de uma caixinha de leite, por exemplo, pode-se observar que os “cantos” representam a noção de ponto na geometria primitiva, assim como as “dobras” reproduz segmentos de retas e um “lado” da caixa traz a noção de plano.

Manuseando embalagens, os alunos poderão compreender melhor a relação entre duas retas, entre reta e plano e entre planos (paralelos, perpendiculares, concorrentes); ângulo e ângulo poliédrico, propriedade dos polígonos (triângulos, quadriláteros etc.) e da circunferência e do círculo e dos sólidos geométricos. De acordo com Biembengut e Hein (2013, p. 35)

Ao se ter como estudo as arestas de uma embalagem com forma de poliedro é possível explorar as posições relativas entre duas retas coplanares como: retas paralelas, ortogonais, perpendiculares e concorrentes, além de estudar as medidas dos ângulos formados entre duas retas.

Em relação às faces são estudadas as posições relativas entre dois planos: paralelos, secantes e ortogonais. É possível ainda estudar a posição relativa entre uma reta e um plano, bem como reta contida no plano e reta secante ao plano. Também calcular a distância entre dois pontos, entre um ponto e um plano, entre um ponto e uma reta, assim como determinar o ângulo formado entre duas retas, entre dois planos e entre reta e plano.

Forma, Retângulo

Descrição gerada automaticamente

Figura 2: paralelepípedo (Elaborada pelo pesquisador)

Na figura acima apresenta de acordo com Farago e Carneiro (2014, p. 53-65):

* Ponto: é aquilo que de nada é parte, ou seja, é um elemento da geometria que não há como dimensionar. Os pontos são representados por uma letra maiúscula do alfabeto: A, B, C, D.
* Reta: é uma linha unidimensional, tendo apenas comprimento e são ilimitadas. As retas são representadas por uma letra minúscula do alfabeto. Na figura tem-se que as arestas AB, AA’ e AC são segmentos de retas.
* Plano: é representado por duas dimensões, largura e comprimento, sendo ilimitado em suas dimensões. Os planos são representados por uma letra grega minúscula. Na figura, são exemplos de planos: AA’C’C e ABDC.

Posições relativas entre duas retas:

* Reta AB e reta A’B’ são paralelas;
* Reta AA’ e AB são perpendiculares;
* Reta AA’ e AD’ são concorrentes.

Posições relativas entre planos:

* Os planos ABCD e A’B’C’ D’ são paralelos;
* Os planos ABCD e AB’D’C são secantes.

Ângulo entre reta e plano: é a medida do ângulo α formado pelo plano ABCD e a reta AD’.

Distância entre dois pontos: é o comprimento da diagonal AD’ do paralelepípedo.

Os poliedros são sólidos geométricos limitados por um número finito de polígonos denominados faces. Cada lado desses polígonos é comum a um único lado de outro polígono. Os polígonos recebem nomes de acordo com o número de faces. Assim, um tetraedro possui quatro faces, um pentaedro cinco faces e um hexaedro possui seis faces.

No que se refere aos elementos dos poliedros pode-se identificar as faces laterais, as bases, os vértices e as arestas. Ao analisar estes elementos é possível destacar uma relação importante nos poliedros convexos entre o número de vértices, arestas e faces: a Relação de Euler (V – A + F = 2) a soma do número de vértices com o número de faces menos o número de arestas é igual a dois.

Na figura tem-se:

V – A + F = 2

12 – 18 + 8 = 2

Diagrama, Desenho técnico

Descrição gerada automaticamente

Figura 3: prisma hexagonal (Elaborada pelo pesquisador).

Para construir uma embalagem é preciso saber qual o produto (tipo, tamanho), para que tipo de consumidor (material, cor e adorno) e como será transportado. Com estas informações, inicialmente, é feito um desenho (em perspectiva e planificado) devendo conter todas as informações necessárias como medidas, espécie de material, dentre outros, pois o valor da embalagem incide no valor final do produto.

Uma preocupação é construir uma embalagem que utilize a mínima quantidade possível de material, sem perder a funcionalidade e a aparência. Para calcular a quantidade de material de uma embalagem de qualquer forma basta abrir, planificar ou supor aberta, fazendo um esboço com as devidas dimensões. A partir daí, calculam-se as áreas das figuras planas compostas (poliedros). Para Biembengut e Hein (2013, p. 41):

Nessa etapa, você pode introduzir as medidas de superfície - área, conceituando e justificando por que a área do retângulo é igual ao produto do comprimento de dois lados consecutivos, deixando-os deduzir, de preferência por meio de desenhos ou recortes. Como farão muitos cálculos, e considerando que nem todas as medidas são inteiras, você também pode relembrar as operações com números decimais ou ainda implementar o uso de calculadoras. O importante aqui é que o aluno tenha habilidade de resolver o problema e desenvolver a criatividade.

Para uma embalagem que possui a forma de um paralelepípedo retângulo são consideradas as medidas de comprimento, largura e altura, indicadas por a, b, e c, respectivamente. Nessas condições, pode-se expressar um modelo matemático que determina a área total deste tipo de embalagem da seguinte forma: o paralelepípedo é formado por seis faces retangulares, sendo dois retângulos com dimensões a.b, dois retângulos com dimensões a.c e dois retângulos com dimensões b.c. Assim, chamando de St sua área total, tem-se:

Uma imagem contendo Gráfico de caixa estreita

Descrição gerada automaticamente

Figura 4: planificação do paralelepípedo (Elaborada pelo pesquisador).

St = 2.a.b + 2.a.c + 2.b.c, colocando-se o fator comum em evidência:

St = 2.(a.b + a.c + b.c).

Observação: em uma embalagem há partes (internas/externas) nas junções ou dobras, as quais não foram consideradas.

Para a embalagem que possui forma de um cilindro reto pode-se generalizar a sua área total ou, ainda quantidade de material necessário para fazer uma lata (sem considerar junções) por um modelo matemático da seguinte maneira:

Diagrama

Descrição gerada automaticamente

Figura 5: planificação do cilindro (Elaborada pelo pesquisador).

A área total de um cilindro, conforme a planificação é igual a soma das áreas das duas bases que é uma região circular de raio r, mais a área da superfície lateral formada por um retângulo de dimensões h, altura do cilindro, e 2.π.r equivalente ao comprimento das circunferências das bases do cilindro. Assim se obtém:

St = 2.π.r2 + 2.π.h, colocando o fator comum em evidência 2πr:

St = 2.π.r.(r + h)

Sobre os estudos com embalagens na forma de cilindro, é interessante também levar os alunos a chegarem, aproximadamente, ao valor de π (3,1416...). Para se chegar a esse resultado, deve-se tomar a medida do contorno do cilindro, usando um cordão ou algo similar e, em seguida, fazer a razão dessa medida pelo diâmetro do círculo.

Recentemente, tornou-se popular a seguinte definição: π é a área do círculo de raio 1. Esta definição leva a um modelo matemático em que se calcula a área de qualquer círculo. Ao usar o conceito de figuras semelhantes um círculo de raio r é semelhante ao círculo de raio 1 e a razão de semelhança é a razão entre os seus raios. Sabe-se que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim, se S é a área de um círculo de raio r, temos que:

=()2 Logo, a área do círculo de raio r é S = π.r2

Pode-se também encontrar um modelo matemático que calcula o comprimento de qualquer circunferência em função da medida de seu raio. A figura a seguir mostra como obter experimentalmente o comprimento de uma circunferência de raio r a partir do fato que a área do círculo correspondente é conhecida. Decompõe-se o círculo em um número par bastante grande de setores e predispõe esses setores na forma sugerida pela figura.

Desenho de personagem de desenho animado

Descrição gerada automaticamente com confiança média

Figura 6: o círculo aberto (Elaborada pelo pesquisador).

Sendo C o comprimento da circunferência a figura formada pelos setores arrumados é aproximadamente um paralelogramo de base C/2 e altura r. Ao igualar as áreas tem-se:

.r = π.r2 dividindo a expressão por r

= π.r ao multiplicar os meios pelos extremos

C= 2.π.r

Este resultado permite uma nova maneira de se chegar à área de um círculo, pois ao decompô-lo em vários setores de número par e justapor uma parte sobre a outra obtém-se um paralelogramo de base igual à metade do comprimento do círculo ( ) e altura igual ao raio r. Ao fazer então a área do paralelogramo S = b.h, tem-se:

S = . r

S = π.r2

Esta expressão é um modelo para calcular a medida da área de qualquer círculo em função da medida do raio.

Para a embalagem que tem forma de um cone reto de raio R e geratriz g, pode-se determinar a sua área somando a área Sb = π.R2 do círculo que compõe a sua base mais a área da superfície lateral que pode ser desenrolada e transformada em um setor circular de raio igual à geratriz g do cone e cujo arco tem comprimento 2.π.R.

Para calculá-la será usada apenas uma elementar regra de três, pois a área de um setor circular é diretamente proporcional ao comprimento do arco que ele subtende. Será dito, então, que a área S desse setor está para a área do círculo de raio g, assim como o comprimento do arco 2.π.R está para o comprimento total da circunferência 2.π.g. Logo, a área lateral do cone reto vale:

Sl π.g2

2.π.R 2.π.g

Sl =

Sl = π.R.g

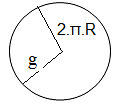
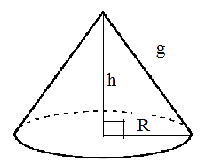


Figura 7: cone e setor circular (Elaborada pelo pesquisador).

Dessa forma, o modelo matemático que generaliza a área total de um cone é:

St  = Sb + Sl

St  = π.R2 + π.R.g, colocando o fator comum em evidência,

St = π.R(R + g).

Para as embalagens com forma de pirâmides é possível determinar a área total fazendo a planificação desta. Assim, para embalagem que tem forma de uma pirâmide de base quadrangular calcula-se a área do quadrado de lado l e soma com a área da superfície lateral que é composta por quatro triângulos isósceles de base l e apótema ap.

Diagrama, Forma

Descrição gerada automaticamente com confiança média

Figura 8: planificação da pirâmide de base quadrangular (Elaborada pelo pesquisador).

Portanto, pode-se obter um modelo para calcular a área total St de uma embalagem que possui esta forma da seguinte maneira:

St = Sb + 4.Sl

St = l² + 4.

St = l² + 2.ap

Nesta etapa, o professor pode trabalhar tanto o conceito de áreas e perímetros dos polígonos quanto dos sólidos geométricos quando se justifica, por exemplo, porque a área do triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela altura. E, assim, deixar os alunos deduzirem de preferência por meio de desenhos, recortes, construções e planificações das embalagens. É importante que ao encontrar um modelo matemático os alunos validem o mesmo para a situação-problema real e simulem para outras embalagens de medidas diferentes que possuem o mesmo formato.

Ao comprar um produto não só se paga por este como também por sua embalagem. Dessa forma, quanto mais cara é a embalagem mais caro fica o produto. Atualmente, diante da concorrência, o fabricante ou o comerciante, além de procurar oferecer um bom produto, com boa aparência, necessita detectar as diversas variáveis que permitem baratear o produto, em particular, a embalagem.

Biembengut e Hein afirmam (2013, p. 41): “[...] nesta etapa, você pode desenvolver conceitos de medidas de volume, capacidade e massa”. Na embalagem, uma das propostas é estabelecer um formato adequado que utilize a quantidade mínima de material e o máximo de aproveitamento ou volume. Portanto, qual é o ideal para uma embalagem de menor custo e melhor manuseio?

O volume é a medida de espaço ocupada por um sólido e capacidade é o espaço que um corpo possui para armazenar algo. Muitas vezes, o volume de um corpo (ou recipiente) é igual a sua capacidade. Isto acontece quando a espessura das paredes do corpo é tão fina que pode ser considerada desprezível. Neste caso, a quantidade de espaço que ele ocupa é praticamente igual à quantidade de espaço que ele dispõe para armazenar o produto. Habitualmente, quando são dadas as dimensões de uma caixa ou um recipiente para se determinar a sua capacidade supõe-se que essas medidas são as dimensões internas do recipiente, ou que a espessura de suas paredes é desprezível.

Para se calcular o volume de uma embalagem que possui formato de um paralelepípedo procede-se: o volume pode ser calculado quando multiplicadas as três medidas correspondentes à altura (h), à largura (a) e ao comprimento (b), ou seja:

Volume = altura x largura x comprimento.

Ou

V = h x (a x b), observa-se na figura que largura x comprimento = área da base, logo:

Volume = área da base x altura,

V = Sb x h

Diagrama, Desenho técnico

Descrição gerada automaticamente com confiança média

Figura 9: paralelepípedo retângulo (Elaborada pelo pesquisador).

*Princípio de Cavalieri*: “Dados dois sólidos A e B, apoiados em um plano α e, se todo plano β paralelo ao plano α secciona os dois sólidos determinando superfícies de áreas iguais, então esses sólidos têm o mesmo volume”. Pode-se justificar este fato ao imaginar dois sólidos fatiados no mesmo número de fatias muito finas, todas com a mesma altura. Duas fatias correspondentes com mesma área terão, aproximadamente, o mesmo volume, assim o volume de cada sólido corresponde à soma dos volumes de suas fatias, portanto que os dois sólidos têm volumes iguais.

Diagrama

Descrição gerada automaticamente

Figura 10: os indivíduos de Cavalieri (auroweigel.blogspot.com.br/2010/08/bonaventura-cavalieri.html).

Para calcular o volume de embalagens que têm formato de cilindro é comum aplicar o Princípio de Cavalieri. Como a base do cilindro é um círculo tem-se, então, que o seu volume pode ser expresso pelo seguinte modelo matemático:

V = π.r².h

V = Sb.h

Desenho de personagem de desenhos animados com texto preto sobre fundo branco

Descrição gerada automaticamente com confiança média

Fonte: elaborada pelo pesquisador.

Figura 11: dedução do Princípio de Cavalieri (Elaborada pelo pesquisador).

Para calcular o volume das embalagens com forma de pirâmides observa-se a figura:

Gráfico, Gráfico de radar

Descrição gerada automaticamente

Figura 12: tetraedro regular (Elaborada pelo pesquisador).

Tem-se que:

* As pirâmides ADEF e ABCE têm bases congruentes (DEF≡ABC) e alturas congruentes. Logo, os volumes dessas duas pirâmides são iguais.
* As pirâmides ADEF e ACEF têm bases congruentes (AFD≡AFC) e alturas congruentes (vértice E em relação ao plano que contêm a face ACDF em que estão contidas as duas bases).

Logo, os volumes dessas duas pirâmides são iguais, portanto:

VADEF = VACEF = VABCE

Como o prisma triangular foi decomposto em três pirâmides:

Vprisma = VADEF = VACEF = VABCE

Ou seja:

Vprisma = 3. Vpirâmide

o volume do prisma é dado por

Vprisma = Sb.h

Sb.h = 3. Vpirâmide multiplicado os dois lados da igualdade por obtém-se:

Vpirâmide =  Sb.h

Então para calcular o volume das embalagens com formato de pirâmide é indicado adotar como modelo matemático Vpirâmide =  Sb.h, o qual também pode ser usado para calcular o volume de embalagens com formato de cone. Conforme Biembengut e Hein (2013, p. 45-6) nesta etapa o professor deve também apresentar os conceitos de volume e capacidades a partir de experiências como empilhar diversas caixas ou latas e comparar o tamanho ou o espaço que ocupam; colocar os mais diversos materiais dentro das embalagens (pedra, areia, algodão, água) para compreender capacidade e densidade.

O professor deve ainda fazer a relação entre massa e peso, pedindo para os alunos pesarem uma caixa de sapato cheia de areia e outra cheia de palha. Nesta etapa também são apresentadas as equivalências das unidades de medidas de volume e capacidade. Nesse momento é válido solicitar aos alunos que observem nos rótulos das embalagens usadas para armazenar líquidos e notar que em algumas a unidade de medida é o mililitro (ml) e o litro (l); nas seringas, centímetros cúbicos (cm³); outras como caixa d’água, em metros cúbicos (m³).

1l = 1dm³ = 1000 cm³

V = 1dm x 1dm x 1dm = 1 dm³ = 1l.

No comércio usam-se muitas embalagens com a forma de um prisma retangular como, por exemplo, a embalagem de leite tipo longa vida. Ao mesmo tempo são muito usadas também aquelas com o formato de um cilindro como, por exemplo, as embalagens de óleo comestível. Ao supor que ambas possuem o mesmo volume e têm alturas iguais é possível mostrar que as embalagens na forma de um prisma têm área total maior que os cilindros.

Ao considerar os volumes iguais para os dois sólidos, obtém-se:

V1 = V2

b.a.h = π.r².h dividindo os dois lados da igualdade por h

a.b = π.r² (I).

Tem-se que a área total de um prisma de base retangular é:

St = 2.(a.b +a.c + b.c)

St = 2. (II)

Figura 13: paralelepípedo e cilindro.

Tela de computador com fundo branco

Descrição gerada automaticamente com confiança baixa

Figura 13: paralelepípedo e cilindro (Elaborada pelo pesquisador).

A área total do cilindro é:

St = 2.π.r² + 2.π.r.h (III)

Sendo a.b = π.r² em (I) então a = e b = substituindo em (II) tem-se:

St = 2. aplicando a propriedade distributiva e colocando o fator comum em evidência obtém-se:

St = 2.π.r² + 2.π.r.h.( + ) ˃ 2.π.r² + 2.π.r.h

Conclui-se que é utilizado mais material para construir uma embalagem com formato de um prisma de base retangular do que em uma embalagem com formato de um cilindro. No exemplo da caixa de leite usa-se a embalagem no formato de um prisma retangular pela razão de estas ocuparem menos espaços dentro das caixas que são utilizadas nos transportes. Devido ao material ser um tanto flexível essa forma permite um melhor manuseio.

Conforme o exposto acima, ao construir uma embalagem é necessário saber qual é o tipo de produto (tamanho, forma, massa, densidade, durabilidade), o público consumidor, a “forma” de transporte e, a partir dessas análises, definir qual é o material ideal para embalar esse produto, a forma e tamanhos ideais.

Com o tema embalagens também é possível trabalhar problemas de otimização. Por exemplo, ao dispor de uma folha de papel cartão na forma quadrada de lado 20 cm, determinar as dimensões de uma embalagem na forma de um prisma de base retangular para que a mesma tenha volume máximo.

Encontrando a equação que determina o volume da caixa em função da altura tem-se:

Diagrama, Desenho técnico

Descrição gerada automaticamente

Figura 14: construção de uma caixa (Elaborada pelo pesquisador).

V(h) = Sb . h

V(h) = l². h

V(h) = (20 – 2h)² .h

V(h) = (400 – 80h + 4h²).h

V(h) = 4h³ - 80h² + 400h

Ao calcular a derivada primeira,

V’(h) = 4h² - 160h + 400

E ao fazer V’(h) = 0 para determinar os pontos críticos,

12h² - 160h + 400 = 0

h1 = 10

h2 =

V(10) = 4.10³ - 80.10² + 400.10 = 0

= 4. - 80. + 400. =

Ao representar essa função no gráfico podem-se ser obtidos os pontos críticos, ou seja, os pontos de máximo e mínimo.

Gráfico

Descrição gerada automaticamente

Figura 15: gráfico da função v’(h) (Elaborada pelo pesquisador).

Pelo gráfico o ponto de máximo é h= e como busca-se a medida da altura que permita um máximo volume, a medida de h deve ser = 3.33cm. Ao determinar o “tamanho ótimo” de uma embalagem, ou seja, as medidas ideais para que tenha um mínimo de área (gaste o mínimo de material) para um máximo volume (tenha um máximo aproveitamento), o professor deve incentivar os alunos a encontrarem modelos matemáticos que permitam reduzir o desperdício no momento em que se faz o corte de material para as embalagens.

De acordo Biembengut e Hein (2013, p. 49), nessa etapa, o professor pode apresentar o conceito de função, função polinomial e pontos críticos de uma função. Neste exemplo ao cortar da folha de papel-cartão é um momento para se trabalhar com valores aproximados.

Ainda se pode, independente do grau de escolaridade, conscientizar sobre o meio ambiente, desperdício, a reciclagem do lixo e a visita às fábricas de embalagem.

**CONCLUSÕES**

A prioridade deste trabalho foi sugerir atividades com o uso de embalagens no trabalho com a Modelagem Matemática para facilitar o ensino e aprendizagem do conceito de sólidos geométricos.

Neste contexto, o conhecimento de diversas possibilidades de atividades que se pode propor com o tema embalagem por meio da MM mostra que ela é uma ótima estratégia de ensino ao extrapolar os limites da educação convencional e tornar o aluno sujeito-ativo na construção de sua aprendizagem, além de proporcionar um ensino prazeroso tanto para ele quanto para o professor.

Dessa forma, ao desenvolver esta proposta em sala de aula pode-se obter uma aprendizagem com significado voltado ao cotidiano do aluno, pois as atividades contribuem para uma melhor compreensão de possíveis problemas do mundo real, assim como para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático de cada um dos aprendizes.

O uso das embalagens para a construção do conhecimento possibilita ao aluno construir representações das formas geométricas, fazer medidas, comparações, planificações/modificações, testar, analisar, visualizar, justificar, registrar, validar e explorar situações reais, criando possibilidades para o conhecimento significativo e reflexivo.

Partindo dessa premissa, a MM como alternativa metodológica do ensino permite ao aluno fazer uso de situações reais/concretas no processo de um ensino-aprendizagem mais significativo, reflexivo-crítico na aquisição do conhecimento científico/pragmático.

Nessa conjectura, com essa proposta o aprendiz se sente mais motivado/entusiasmado ao estudar matemática, uma vez que parte de sua própria aplicabilidade, tornando-se sujeito agente de sua aprendizagem e participante de sua inteiração no contexto social.

Consoante ao que foi dito, não se deve enganar e acreditar que trabalhar com modelagem é fácil ou irá resolver todos os problemas de deficiência de aprendizagem da matemática, mas é mais uma alternativa aos professores e alunos, a qual exige tempo e dedicação.

Nesse encadeamento de ideias, diante de diversas atividades que podem ser desenvolvidas com a MM é preciso realizar novas pesquisas a fim de conhecer suas vantagens e possibilidades.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ALMEIDA, L.M.W. de; ARAÚJO, J.de L.; BISOGNIN, E. **Práticas de modelagem matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas**. Londrina: Eduel, 2011.

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico.** Rio Janeiro: ANPED, 2001. Disponível em: <<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Barbosa.pdf>>. Acesso em: 04 mar. 2023.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: Concepções e experiências de futuros professores**. Rio Claro- SP, Brasil, 2004.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática e os professores: a questão da formação.** Bolema, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001. Disponível em: <<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_jonei_bolema.pdf>>. Acesso em: 18 fev. 2023.

BASSANEZI, R. C. Modelagem como metodologia de ensino de matemática. **In: Actas de la Séptima Conferência Interamericana sobre Educacíon Matemática.** Paris: UNESCO, 1990. p. 130-155.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2011.

BIEMBENGT, M. S.; Hein, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. São Paulo, SP: Contexto, 1999.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state trends and issues in: **mathematics instruction**. *Educational Studies in Mathematics* 22, pp 37–68, 1991. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00302716#page-1>>.

Acesso em: 17 fev. 2023.

BORBA, M. de C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. 199Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. **Revista de Educação Matemática da SBEM-SP**, [São José do Rio Preto, SP], n. 3, p. 63-70, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da Educação: Orientações Curriculares Nacionais. **Ensino de quinta a oitava séries. Introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>>. Acesso em: 04 mar. 2023.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação, Secretaria da Educação: Orientações Curriculares Nacionais. **Educação Fundamental. introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC/SEF,1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>>. Acesso em: 12 fev. 2023.

BURAK, Dionísio. [**Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série**.](http://dionisioburak.com.br/documents/DissertacaoDionisio.pdf) Rio Claro-SP, 1987. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - IGCE, Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho-UNESP. Disponível em: <<http://dionisioburak.com.br/documents/DissertacaoDionisio.pdf>>. Acesso em: 15 fev. 2023.

CANEN, A.; SANTOS, Â. R. dos. **Educação multicultural: teoria e prática para professores e gestores em educação**. Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2009.

[**Catálogo de Teses e Dissertações**](https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/). Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>. Acesso em: 22 fev. 2023.

FARAGO, J. L.; CARNEIRO, L. N. dos S. **Matemática: ensino médio, 2ª série.** Curitiba: Positivo, 2014.

MEYER, J. F. da C. de A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. **Modelagem em Educação matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

MORAN, J. M. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 6ª ed. Campinas: Papirus, 2000

1. Professor na FAQUI e UEG, Mestre em Matemática, e-mail: josemir\_carmo@hotmail.com [↑](#footnote-ref-1)